

I. Généralité sur les suites avec : $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite son premier terme est u_{n_0} : (rappel)

A. Suite majorée – suite minorée – suite bornée :

a. Définitions :

- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée par un réel M si et seulement si $\forall n \geq n_0; u_n \leq M$ (ou $\forall n \geq n_0; u_n < M$).
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée par un réel m si et seulement si $\forall n \geq n_0; u_n \geq m$ (ou $\forall n \geq n_0; u_n > m$).
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si et seulement si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée et bornée .
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R}^+; \forall n \geq n_0; |u_n| \leq A$ ou $(< A)$.

B. La monotonie d'une suite :

a. Définition :

- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissant si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_n \leq u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissant si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_n < u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissant si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_n \geq u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissant si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_n > u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_n = u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est périodique de période $T \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_{n+T} = u_n$.

II. Suite arithmétique – son terme général – la somme S_n : (rappel)

a. Définition :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique . r est un nombre réel non nul .

❖ La suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} équivaut à $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n = r$.

(ou encore $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$) .

❖ $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} on a :

$$\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$$

❖ Pour la somme suivante : $S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ ou a : $S_n = \left[\frac{u_n + u_p}{2} \right] \times (n - p + 1)$.

$$S_n = \frac{(\text{le premier terme}) + (\text{le dernier terme})}{2} \times (\text{le nombre des termes de la somme})$$

❖ **Propriété caractéristique** : $\forall p \geq n_0 ; \forall q \geq n_0 ; u_q = u_p + (q - p)r$ (avec q et p de \mathbb{N}) .

❖ **Moyenne arithmétique** : $u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r on a : $a + b = 2c$

b. Remarque :

- La somme suivante $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ possède $n+1$ terme . (c.à.d. $n-0+1$) .
- La somme suivante $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ possède n terme . (c.à.d. $n-1+1$) .
- La somme suivante $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \dots + u_n$ possède $n+1$ terme . (c.à.d. $n-n_0+1$)

III. Suite géométrique – son terme général – la somme S_n : (rappel)**c. Définition :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique . q est un nombre réel non nul .

- ❖ La suite (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} équivaut à $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = q \times u_n$.
(ou encore $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$) .
- ❖ $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} on a : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$
- ❖ Pour la somme suivante : $S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ ou a :
 - Si $q \neq 1$ on a $S_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1} \right] \times u_p$.
 - $q = 1$: $S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p (n - p + 1)$.
- ❖ **Propriété caractéristique** : $\forall p \geq n_0 ; \forall q \geq n_0 : u_q = u_p \times q^{q-p}$ (avec q et p de \mathbb{N}) .
- ❖ Moyenne géométrique : $u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q on a : $a \times c = b^2$

IV. Limites d'une suite numérique : $(n \mapsto +\infty)$ **A. Limite finie d'une suite :****a. Activité :**

- ❖ On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n}$; $n \geq 2$.
- ❖ Sur une droite graduée on présente l'intervalle $I_0 = \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$ de centre 0 avec unité de mesure 2 cm .
- ❖ Calculer quelques termes de la suite et on les place sur la droite graduée , que remarquez-vous ?
- ❖ Si n tend vers $+\infty$, que peut-on dire des termes u_n de la suite ?

b. Vocabulaire :

- On dit que la limite de la suite (u_n) est 0 (zéro) lorsque n tend vers $+\infty$.
- On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

**c. Définition :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

On dit que la limite de la suite (u_n) est le nombre réel ℓ si pour tout intervalle ouvert I_ℓ et de centre ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang , on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

d. Propriété :

- Si une suite a une limite alors cette limite est unique .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^i} = 0$ ($i \in \mathbb{N}^*$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

e. Exemple :

- ❖ On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n} + 3$, on montre que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3 - 3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

B. Limite infinie d'une suite :**a. Définition :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

- On dit que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$ si pour tout A de \mathbb{R}^+ l'intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang , on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la limite de la suite (u_n) est $-\infty$ si pour tout A de \mathbb{R}^+ l'intervalle $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang , on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

b. Propriété :

- Si une suite a une limite alors cette limite est unique .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^i = +\infty$ ($i \in \mathbb{N}^*$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

C. Convergence d'une suite numérique :**a. Définition :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

- Si la limite de la suite (u_n) est finie on dit que la suite (u_n) est convergente .
- Si la limite de la suite (u_n) est infinie ou la suite (u_n) n'a pas de limite on dit que la suite (u_n) est divergente .

b. Exemple :

- $u_n = n^4$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ d'où la suite (u_n) est divergente .
- $u_n = (-1)^n$ cette suite n'a pas de limite car si n est paire on a $u_n = 1$ et si n est impaire on a $u_n = -1$ et la propriété (Si une suite a une limite alors cette limite est unique) .
- $u_n = \frac{1}{n} + 3n ; \geq 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ d'où la suite (u_n) est convergente .

c. Propriété :

- Toute suite croissante et majorée est une suite convergente .
- Toute suite décroissante et minorée est une suite convergente .

d. Exemple :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n^3} + 7 ; n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est minorée .
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante .
3. En déduit la convergence de la suite (u_n) .

Réponse :

1. la suite (u_n) est minorée :

on a :

$$n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^3 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^3} + 7 > 7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^3} + 7 > 0$$

$$\Rightarrow u_n > 0$$

Par suite : (u_n) est minorée par 0 (zéro) .

2. la suite (u_n) est décroissante .

on a :

$$n+1 \geq n \Rightarrow (n+1)^3 \geq n^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

Donc : la suite (u_n) est décroissante .

3. En déduit la convergence de la suite (u_n) :

On a : la suite (u_n) est décroissante et minorée donc d'après une propriété la suite (u_n) est convergente .

V. Opérations sur les limites des suites :

a. Propriété :

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites numériques .

- Les opérations sur les suites sont les mêmes que les opération des fonctions.
exemple : $(u_n)_{n \geq n_0} + (v_n)_{n \geq n_0} = (u_n + v_n)_{n \geq n_0}$.
- Les propriétés des opérations des limites des suites sont les mêmes que celles des fonctions .
exemple 1 : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = l + l'$.
exemple 2 : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = -\infty$.
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $u_n > 0$ alors $l > 0$.
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$ et $v_n \leq u_n$ alors $l' \leq l$.

b. application :

1. calculer la limite de la suite suivante : $u_n = \frac{1}{n}$; $n \geq 1$.

on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

2. calculer la limite de la suite suivante : $v_n = \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n}$; $n \geq 1$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right) = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n} = +\infty$.

VI. Critères de convergences :

a. Critères :

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ et $(w_n)_{n \geq n_0}$ trois suites numériques tel que à partir d'un rang p on a pour tout $n \geq p \geq n_0$ (avec $n \in \mathbb{N}$) . $\alpha > 0$ et $l \in \mathbb{R}$

1. Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.
2. Si $v_n \geq \alpha \cdot u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
3. Si $v_n \leq \alpha \cdot u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.
4. Si $|v_n - l| \leq \alpha \cdot u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.



b. Application :

Application 1 : On considère la suite numérique (u_n) définie par : $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5 ; n > 0$.

1. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$.

On a :

$$\begin{aligned} -1 \leq (-1)^n \leq 1 &\Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow \frac{-1}{n} - 5 \leq \frac{(-1)^n}{n} - 5 \leq \frac{1}{n} - 5 \\ &\Rightarrow \frac{-1}{n} - 5 \leq v_n \leq \frac{1}{n} - 5 \end{aligned}$$

On sait que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} - 5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 5 = -5$.

D'après l'un des critères de convergences on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$.

Application 2 : On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = 2n + \cos(n) ; n \geq 0$.

1. Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On a : $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leq 2n + \cos(n) \leq 2n + 1$

Donc : $2n - 1 \leq 2n + \cos(n)$

D'où : $2n - 1 \leq u_n$

On sait que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 1 = +\infty$

D'après l'un des critères de convergences on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + \cos(x) = +\infty$.

Application 1 : On considère la suite numérique (u_n) définie par : $v_n = \frac{\cos n}{n} ; n \geq 1$.

2. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

On a : $|v_n - 0| = \left| \frac{\cos n}{n} \right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n}$ (car $|\cos n| \leq 1$)

D'où : $|v_n - 0| \leq \frac{1}{n}$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

c. Exercice :

Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n + 5}{n^3}$.

VII. Suite de la forme particulières :

A. Suite de la forme : $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$:

**a. Propriété :**

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$ alors q^n n'a pas de limite.

b. Exemple :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$, car $q = 3 > 1$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 8^n}{7^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{7^n} - \frac{8^n}{7^n}$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n - \left(\frac{8}{7}\right)^n = 0$

$$\left(\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^n = +\infty ; -1 < \frac{2}{7} < 1 \text{ et } -1 < \frac{8}{7} < 1 \right).$$

B. Suite de la forme $u_n = n^r$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$ **a. Propriété :**

- Si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$.
- Si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = 0$.

b. Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \sqrt[7]{n^3}$; $n \geq 1$.

Calculons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

1^{ère} méthode : On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[7]{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{3}{7}} = +\infty$ car $r = \frac{3}{7} > 0$.

2^{ème} méthode : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[7]{n^3} = +\infty$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

C. Suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ de la forme $v_n = f(u_n)$:**a. Activité :**

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x-5}{7x+4}$ et la suite (u_n) définie par $\left(u_n = \frac{1}{n^3}\right)_{n \geq 1}$.



1. On considère la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par : $v_n = f(u_n)$.
 - Ecrire la suite (v_n) en fonction du terme u_n .
 - En déduit v_n en fonction de n .
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ en déduit une relation entre $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et f et ℓ .

b. Propriété :

Si une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers ℓ (c.à.d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$) et f est une fonction continue en ℓ alors la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente vers $f(\ell)$ (c.à.d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(\ell)$).

c. Exemple :

On considère la fonction $f(x) = \frac{5x-6}{x+3}$ et la suite $u_n = \frac{\cos n}{n}$; $n \geq 1$ et la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par : $v_n = f(u_n)$.

1. Ecrire la suite (v_n) en fonction de n .
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
3. On détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Correction :

1. la suite (v_n) en fonction de n .

$$\text{on a : } v_n = f(u_n) = \frac{5u_n - 6}{u_n + 3} = \frac{5 \times \frac{\cos n}{n} - 6}{\frac{\cos n}{n} + 3} = \frac{5 \cos n - 6n}{\cos n + 3n}.$$

$$\text{Conclusion : } v_n = \frac{5 \cos n - 6n}{\cos n + 3n}.$$

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $-1 \leq \cos n \leq 1$

Par suite $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $-1 \times \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \times \cos n \leq 1 \times \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

$$\text{Or : } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (d'après un critère de convergence).

3. On détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et la fonction f est continue en 0 (car f est continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$) et

$v_n = f(u_n)$ donc d'après la propriété la limite de la suite (v_n) est $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(0) = -2$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -2$

D. Suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$:

a. Définition :

Soit une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ tel que $\forall n \geq n_0 ; u_{n+1} = f(u_n)$ avec f est une fonction .

Si on a :

- f est une fonction continue sur un intervalle I .
- $f(I) \subset I$.
- $u_{n_0} \in I$ (le premier terme) .
- La suite (u_n) est convergente (vers $l \in \mathbb{R}$)

Alors l est solution de l'équation $x \in I , f(x) = x$ (c.à.d. l vérifie $l = f(l)$) .

b. Exemple :

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x+6}$.

1. Donner le tableau de variation de f .

2. On considère l'intervalle $I = [0, 3]$.

- Déterminer $f(I)$.

3. On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} ; n \geq 0 \end{cases}$$

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 3$
- Montrer que la suite (u_n) est croissante .
- La suite (u_n) est convergente ?
- Ecrire la suite (u_n) en fonction de f et de u_n

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Correction :

1. On donne le tableau de variation de f .

On a :

• $f'(x) = (\sqrt{x+6})' = \frac{(x+6)'}{2\sqrt{x+6}} = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} > 0$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• Le tableau de variation de f est :

x	-6		$+\infty$
$f'(x)$		$+\infty$	+
$f(x)$			$+\infty$
	0		\nearrow

2. On détermine $f(I)$.

La fonction f est continue sur son domaine de définition $D_f = [-6, +\infty[$ donc f est continue sur $I = [0; 3]$

On a : $f(I) = f([0; 3])$

$= [f(0), f(3)]$ (car l'image d'un intervalle est un intervalle et puisque f est croissante).

$= [\sqrt{6}; 3]$

Conclusion : $f(I) = f([0; 3]) = [\sqrt{3}, 3] \subset [0, 3]$.

3. ..

- Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 3$

On démontre par récurrence :

- On vérifie la relation est vrai pour $n = 0$, on a : $0 \leq u_0 = 2 \leq 3$ donc la relation est vrai pour $n = 0$.
- On suppose que la relation est vraie pour n de \mathbb{N} c.à.d. $0 \leq u_n \leq 3$ (hypothèse de récurrence)
- On démontre que : la relation est vraie pour $n + 1$ c.à.d. on démontre que $0 \leq u_{n+1} \leq 3$.

D'après hypothèse de récurrence on a :

$$0 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow 6 \leq 6 + u_n \leq 9 ; (+6)$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} \leq \sqrt{6 + u_n} \leq 3 \text{ (car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3$$

Donc la relation est vraie pour $n + 1$.

Conclusion : On applique le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 3$

- Montrons que la suite (u_n) est croissante .

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$

On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6 + u_n} - u_n = \frac{6 + u_n - u_n^2}{\sqrt{6 + u_n} + u_n} = \frac{(3 - u_n)(2 + u_n)}{\sqrt{6 + u_n} + u_n} \text{ son signe est le signe de}$$

$(3 - u_n)(2 + u_n)$. (on peut écrire $(3 - x)(2 + x)$ avec $x = u_n$)

u_n	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$(3 - u_n)(2 + u_n) = u_{n+1} - u_n$		$-$	0	$+$
		0	$+$	0
		$-$	0	$-$

Puis que $0 \leq u_n \leq 3$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Conclusion : la suite (u_n) est croissante

- La suite (u_n) est convergente car la suite est croissante et majorée par 3 (d'après une propriété)
- On écrire la suite (u_n) en fonction de f et de u_n , on a $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n)$.



5. On détermine la limite de la suite (u_n) .

On a :

- f est une fonction continue sur l'intervalle I .
- $f(I) = f([0;3])$.
- $u_0 = 2 \in [0;3]$ (le premier terme) .
- La suite (u_n) est convergente (vers $l \in \mathbb{R}$)

Donc d'après une propriété on a l est solution de l'équation $x \in I$, $f(x) = x$.

On résout l'équation $x \in I$, $f(x) = x$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = x$$

$$\Leftrightarrow x+6 = x^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-x)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \in [0;3] \text{ ou } x = -2 \notin [0;3]$$

D'où : $l = 3 \in [0;3]$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$